

$$1a) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$$

$\frac{1}{2}$ definice: Zvolím $K > 0$ libovolně, pak položíme $n_0 = \lceil \sqrt{K} \rceil + 1$
 $(\lceil \sqrt{K} \rceil$ směřující aloučátek $\sqrt{K}$, což je nejmenší přirozené číslo větší než $\sqrt{K}$. Je jisté existuje díky Archimédově vlastnosti.)
 Potom $\forall n > n_0$ platí $n^2 > n_0^2 > K$, tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$

$$1b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$\frac{1}{2}$ definice: Uvidíme, že $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$ pro libovolné n .

Chci tedy ukázat: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0: \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

Zvolím libovolně ε . Hledám $n_0: \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$

$$\Rightarrow \sqrt{n_0} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2. \text{ tedy vezmu } n_0 = \left\lceil \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 \right\rceil + 1.$$

Pak $\forall n \geq n_0 \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$. A tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$$1c) \lim_{n \rightarrow \infty} e^n = \infty$$

(jako u a): Zvolím $K > 0$ libovolně. Chci n_0 t.č. $e^{n_0} > K$,
 tedy položíme $n_0 = \lceil \ln K \rceil + 1$. Potom $\forall n > n_0 e^n > K$,
 tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} e^n = \infty$ ↑ protože e^x roste rychle

$$1d) \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} = 0$$

↑ můžu udělat, neboť existuje pravá strana

$$1e) \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty$$

Podobně jako c

$$1f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$$

Podobně jako c

$$1) g) \lim_{n \rightarrow \infty} n!$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$1! = 1, 2! = 1 \cdot 2 = 2, 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \dots$$

zřejmě jde o rostoucí posloupnost, která není shora omezena -

($\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n! \geq x$ - plyne z Archimédovy vlastnosti)

$\Rightarrow$ platí $\forall L \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : n! > L$

proto $\lim_{n \rightarrow \infty} n! = \infty$

$$1) h) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$$

je-li n liché, pak $(-1)^n = -1$

je-li n sudé, pak $(-1)^n = 1$

Tedy posloupnost vypadá takto: $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

Je vidět, že tato posloupnost se nepřibližuje libovolně blízko k žádnému číslu L neboť: zvol $\varepsilon \in (0, 1)$ a $A \in \mathbb{R}$

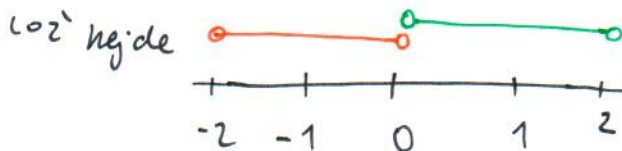
je-li A limitou posloupnosti $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, pak

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |(-1)^n - A| < \varepsilon$$

$(-1)^n \in \{-1, 1\}$ $\uparrow$ toto n může být jak liché, tak sudé.

Tedy platí, že $| -1 - A | < \varepsilon < 1$; $| 1 - A | < \varepsilon < 1$

čili A se jak od 1, tak od -1 liší o méně, než 1,

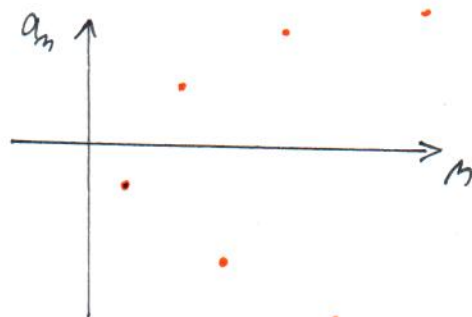


Proto neexistuje A , které by mohlo být limitou.
Posloupnost nejde zřejmě ani do $-\infty$, ani do ∞ .

Neexistuje $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$.

1) i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n$

začátek posloupnosti: $-1, 2, -3, 4, \dots$



podobně jako v 1) h) lze uvažovat, že posloupnost nemá reálnou limitu.

Pokud by posloupnost měla limitu ∞ , pak by byla dle věty 10' z přednášky (kap. III) zdola omezena! Naše posloupnost ale není zdola omezena!

Měli bychom tedy spor s větou 10'. Proto limita není ∞ .

Podobně limita není $-\infty$.

Limita neexistuje

1) j) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

Snadno si rozmyslíme, že posloupnost $\frac{1}{n}$ jde do 0.

To $(-1)^n$ dělá, že členy limity mění znaménko. Pořád ale se prvky přibližují 0 (jen ne zeshora, ale jakoby "z obou stran")

Limita by měla být 0.

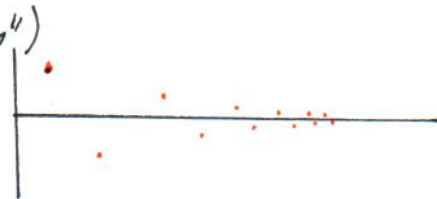
Zkusme to řádně ověřit:

zvol. $\varepsilon > 0$ lib.

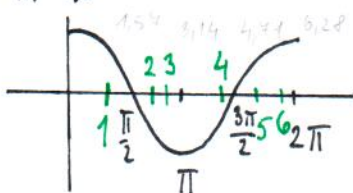
$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{nal. } n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$$

$$\text{Pak } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \left| (-1)^n \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 0$$



1) k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n) \cdot \sqrt{n}$



$\sqrt{n}$ jde do ∞ , ale $\cos(n)$ nabývá jak kladných, tak záporných hodnot a to tak, že $\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{N}, m > n : \cos(n) > 0$ a $\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{N}, m > n : \cos(n) < 0$

Proto limita není ani $+\infty$, ani $-\infty$.

Zaroveň limita nemůže být ani > 0 , ani < 0 .

Kdyby byla limita rovna 0, tak by musel $\cos(n)$ jít k nule

a to tak, že by i $\cos(n) \cdot \sqrt{n}$ šlo k nule. Ale $\cos(n)$ nejde k nule, nebo délka čtvrt vlny je cca 1,57, takže do čtvrt vlny se vejde 1-2 přirozená čísla, tedy i u hodnot velkých n se stává, že $\cos(n)$ není moc blízko 0. Tedy $\cos(n) \not\rightarrow 0$. Limita $\nexists$

$$2) a) \lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

z definice: zvolíme libovolné ε . Chceme najít n_0 , že pro $\forall n > n_0$: $|(-\frac{1}{2})^n| < \varepsilon$.

$$\text{tedy } \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} < \varepsilon \Rightarrow 2^{-n_0} < \varepsilon \Rightarrow -n_0 < \ln_2 \varepsilon \\ \Rightarrow n_0 > -\ln_2 \varepsilon = \ln_2 \frac{1}{\varepsilon}.$$

bereme $n_0 = \lceil \ln_2 \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$. Pak $\forall n: |(-\frac{1}{2})^n| < |(-\frac{1}{2})^{n_0}| < \varepsilon$,
tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$$2) b) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n + \frac{1}{n} \quad \nexists$$

(*kaci ukázat, že pro sudé n : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \text{ sudé}} (-1)^n + \frac{1}{n} = 1$
pro liché n : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \text{ liché}} (-1)^n + \frac{1}{n} = -1$

z jednoznačnosti limity pak $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n + \frac{1}{n}$ neexistuje.

(*) postupují podobně jako třeba ve 2a), ale chci být
v ε okolí 1, (resp. -1), tj. na intervalu
(1- ε , 1+ ε) (resp. (-1- ε , -1+ ε)).

$$2) c) \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n\pi)$$

$$\text{je-li } n \text{ liché, pak } \cos(n\pi) = -1$$

$$\text{je-li } n \text{ sudé, pak } \cos(n\pi) = 1$$

Tedy jde o příklad 1), 4). Tedy limita $\nexists$

$$2) d) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi)$$

$$\text{zřejmě } \forall n \in \mathbb{N} : \sin(n\pi) = 0$$

$$\text{Tedy } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi) = 0$$

← můžeme použít, neboť je Prává strana def.

$$3) a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20}{\sqrt{n}} \stackrel{\text{VOAL}}{=} 20 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 20 \cdot 0 = 0$$

$\uparrow$
2. 1. b)

$$3) b) \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^8 + 2n^3 - 4) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^8 \cdot (-1 + \frac{2}{n^5} - \frac{4}{n^8}) \stackrel{\text{VOAL}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^8 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (-1 + \frac{2}{n^5} - \frac{4}{n^8}) =$$

-∞, VOAL můžeme použít, PS def.

$$3) c) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 \cdot (1 - \frac{2}{n})) \stackrel{\text{VOAL}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{n}) \stackrel{\text{VOAL}}{=} \infty$$

VOAL ← PS def, můžeme

$$3) d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2})}{n^3(1 - \frac{1}{n^3})} \stackrel{\text{VOAL}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^3}} \stackrel{\text{VOAL}}{=} 0$$

VOAL ← PS def, OK

$$3) e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 6n}{n^3 - 7n + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(2 + \frac{6}{n^2})}{n^3(1 - \frac{7}{n^2} + \frac{7}{n^3})} \stackrel{\text{VOAL}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{6}{n^2}}{1 - \frac{7}{n^2} + \frac{7}{n^3}} \stackrel{\text{VOAL}}{=} 2$$

VOAL ← PS def, OK

$$3) f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 3n - 2}{n^5 - 3n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5(2 + \frac{3}{n^4} - \frac{2}{n^5})}{n^5(1 - \frac{3}{n^2} + 1)} \stackrel{\text{VOAL}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n^4} - \frac{2}{n^5}}{1 - \frac{3}{n^2} + 1} \stackrel{\text{VOAL}}{=} 1$$

VOAL ← PS def, OK

3) g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n}$

$\cos(\alpha)$ je posl. omerjena' zdola -1 a sgora 1.

Posl. $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Jde tedy o typ omezená. 0. Takové limity vychází jako 0.

↑
posl. $\frac{\cos(n)}{n}$

Ukaŕme tedy, ťe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n(n)}{n} = 0$

2 vol. $\varepsilon > 0$

$$\text{na! } n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}, m \geq n_0 : \frac{1}{m} < \varepsilon$$

jer likož $\cos(n) \in [-1, 1]$, tak $\frac{\cos(n)}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ pro $n \geq n_0$.

tedy $\forall n \geq n_0: \left| \frac{\cos(n)}{n} \right| < \varepsilon$

3) b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan n + \pi}{n}$

$$\frac{\arctan n + n}{n} = 1 + \underbrace{\frac{\arctan n}{n}}_{0 \text{ m. } 0}$$

Funkcija $\arctan$ je omejena $\Rightarrow$ posl. $\arctan$ n
 Plaki. $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ je oln.

Platz 1: $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

je ok.

$$\text{Proto } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{\text{rectas } n+n}}{n} = 1$$

3) i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{2n} - 3 \cdot 3^n)$

$$n=1 \rightarrow 2^2 - 3 \cdot 3 = -5, n=2 \rightarrow 2^4 - 3 \cdot 3^2 = 16 - 27 = -11, n=3 \rightarrow 2^6 - 3^3 = 64 - 81 = -17$$

$$2^L - 3 \cdot 3^m$$

~~2~~

$$3) i) \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{2^n} - 3 \cdot 3^n)$$

da' se ukázat, že od určitého čísla již platí, že $a_{n+1} > a_n$.

Tedy posloupnost je od určitého indexu rostoucí, tedy dle kap. III. 4, V. 18 má limitu (vlastní, nebo ∞).

Ukážeme, že je ta limita ∞ :

zvol. $\kappa \in \mathbb{R}$

• pokud $\kappa \leq 0$, stačí ukázat, že $4^n - 3^{n+1} > 0$ pro $n \geq n_0$ vhodné zvoleno

$$4^n > 3^{n+1} \quad / \log_4$$

$$n > (n+1) \log_4 3$$

$$n(1 - \log_4 3) > \log_4 3$$

$$\uparrow \quad \underbrace{\quad}_{>0 \text{ (nebo } \log_4 3 < 1)}$$

$$\text{pro } n > \frac{\log_4 3}{1 - \log_4 3}$$

to platí, což jsme chtěli.

• pokud $\kappa > 0$:

$$4^n - 3^{n+1} > \kappa$$

$$4^n > \kappa + 3^{n+1} = 3^n \left(3 + \frac{\kappa}{3^n} \right) \quad / \log_4$$

$$n > n \log_4 3 + \log_4 \left(3 + \frac{\kappa}{3^n} \right)$$

$$n > \frac{\log_4 \left(3 + \frac{\kappa}{3^n} \right)}{1 - \log_4 3}$$

Výraz vpravo je omezený, neboť

$3 + \frac{\kappa}{3^n}$ je omezený

Z Archimédovy vlastnosti tedy plyne, že pro dost velká n nerovnost platí.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{2^n} - 3 \cdot 3^n) = \infty$$

$$3) j) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \times} \quad n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}_{n \text{ činitelů}}$$

pro $n \geq 4$ platí: $2^n < n!$

$$\text{Dě: } n=4: 2^4 = 16 < 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$n \rightarrow n+1$$

$$\text{mám: } 2^n < n! \text{ , chci: } 2^{n+1} < (n+1)!$$

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2 \cdot n! \underset{n+1 > 2}{<} (n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

$$\text{Proto } \frac{2^n}{n!} < 1 \text{ pro } n \geq 4.$$

Je vidět, že $n!$ roste rychleji, než 2^n roste. Proto by měl zlomek $\rightarrow 0$.

Stačí dokázat: $\forall \varepsilon \in (0,1): \frac{2^n}{n!} < \varepsilon$ od určitého n .

$$\text{tedy } 2^n < \underbrace{n!}_{\substack{= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot \varepsilon \\ = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2}}$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot \varepsilon$$

$$2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2$$

zde je činitel nahoře $\geq$ činitel dole

$$2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) > 2^{n-3} \leftarrow \text{pro } n \geq 3 \text{ můžeme}$$

$$\text{chci: } 1 \cdot n \cdot \varepsilon > 2^3 = 8$$

to pro vhodné velkosti platí

$$\text{tedy } \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: \frac{2^n}{n!} < \varepsilon$$

$$\text{Proto } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

$$3) k) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!}$$

podobným argumentem jako v 3) j) lze ukázat, že od určitého n je $3^n < n!$. Zřejmě $n^5 < n^6$.

Tedy jmenovatel roste rychleji, než číselník, proto $\frac{3^n + n^5}{n^6 + n!} \rightarrow 0$.

viz růstová škála v teorii

$$3) l) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right)$$

známe vzorec: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

tedy zkoumáme výraz: $\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n+2} - \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2(n+2)} - \frac{n(n+2)}{2(n+2)} =$

$$= \frac{n((n+1)-(n+2))}{2(n+2)} = \frac{-n}{2(n+2)} =$$

$$= \frac{n \cdot (-1)}{n \cdot (2 + \frac{4}{n})} = \frac{-1}{2 + \frac{4}{n}}$$

čím je n větší, tím je $\frac{4}{n}$ menší a čím je jmenovatel menší, tím je zlomek $\frac{1}{2 + \frac{4}{n}}$ větší. Tedy zlomek $\frac{-1}{2 + \frac{4}{n}}$ klesá.

Zřejmě $-\frac{1}{2} \leq \frac{-1}{2 + \frac{4}{n}}$ a dá se podobně jako dříve

ukázat, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right) = -\frac{1}{2}$

$$4, a) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

VOAL $\leftarrow$ OK, PS def.

V3OREČEK $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$4, b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n+11} - \sqrt[3]{n} \right) \frac{(\sqrt[3]{n+11})^2 + \sqrt[3]{(n+11)n} + (\sqrt[3]{n})^2}{(\sqrt[3]{n+11})^2 + \sqrt[3]{n(n+11)} + (\sqrt[3]{n})^2} \stackrel{\downarrow}{=} \frac{n+11 - n}{\lim_{n \rightarrow \infty} (n+11)^{2/3} + \sqrt[3]{n(n+11)} + n^{2/3}} = 0$$

VOAL $\leftarrow$ OK, PS def

$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2/3} (1 + \frac{11}{n})^{2/3} + \lim_{n \rightarrow \infty} n^{2/3} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{11}{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} n^{2/3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2/3} (1 + \frac{11}{n})^{2/3} + \lim_{n \rightarrow \infty} n^{2/3} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{11}{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} n^{2/3}} = 0$

$$4, c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n} \stackrel{\text{VOAL}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$$

VOAL $\leftarrow$ OK, PS def.

$$4, d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2^2 + 2n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{4}{n} + 2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{4}{n} + 2}}{\sqrt{n}} \stackrel{\text{VOAL}}{=} 0$$

VOAL $\leftarrow$ OK, PS def

$$4)e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 - 1}}{n}$$

$$\frac{\sqrt[3]{n^2 - 1}}{n} = \frac{\sqrt[3]{n^2(1 - \frac{1}{n^2})}}{n} = \frac{n^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^2}}}{n} = \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^2}}}{n^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \text{ tedy } 1 - \frac{1}{n^2} \rightarrow 1,$$

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ tedy } \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{n} \rightarrow 0, \text{ tedy } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 - 1}}{n} = 0$$

použili jsme aritmetiku limit!

$$4)f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2-3} - \sqrt{(n+2)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{1-\frac{1}{n}} - 1)}{n(\sqrt{1-\frac{3}{n^2}} - \sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}})} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n} \cdot (\sqrt{1-\frac{3}{n^2}} - \sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}})}$$

Použijeme VoAL: $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, tedy $\sqrt{1-\frac{1}{n}} - 1 \rightarrow \sqrt{1-0} - 1 = 0$

$$\frac{3}{n^2} \text{ a } \frac{4}{n} \text{ a } \frac{4}{n^2} \rightarrow 0, \text{ tedy } \sqrt{1-\frac{3}{n^2}} - \sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}} \rightarrow 1-1=0$$

$$\sqrt{n} \rightarrow \infty, \text{ tedy } \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

Celkově: $\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n}(\sqrt{1-\frac{3}{n^2}} - \sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}})} \rightarrow \frac{0}{0}$

4) f) Kdybychom nahore a dole vytkli: největší maximu n a použili L'Hôpital, dostali bychom predefinovaný výraz. Proto provedeme následující úpravy...

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2-3} - \sqrt{(n+2)^2}} \cdot \frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n^2-3} + \sqrt{(n+2)^2}}{\sqrt{n^2-3} + \sqrt{(n+2)^2}} = \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((\sqrt{n-1})^2 - (\sqrt{n})^2) (\sqrt{n^2-3} + \sqrt{(n+2)^2})}{(\sqrt{n-1} + \sqrt{n}) ((\sqrt{n^2-3})^2 - (\sqrt{(n+2)^2})^2)} = \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1) \cdot n \cdot (\sqrt{1 - \frac{3}{n}} + 1 + \frac{2}{n})}{\sqrt{n} (\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1) (n^2 - 3 - n^2 - 4n - 4)} = \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} (-1) (\sqrt{1 - \frac{3}{n}} + 1 + \frac{2}{n})}{(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1) n (-4 - \frac{7}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1) (\sqrt{1 - \frac{3}{n}} + 1 + \frac{2}{n})}{\sqrt{n} (\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1) (-4 - \frac{7}{n})} = \\
 & \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{(-1) (\sqrt{1-0} + 1 + 0)}{\infty (\sqrt{1-0} + 1) (-4-0)} \parallel = \frac{-2}{\infty \cdot (-8)} \parallel = 0
 \end{aligned}$$

4)g)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 3n - 1} - n^2}{\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n^3} - \frac{1}{n^4}} - 1 \right)}{n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}} + 1 \right)}{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}} + 1 \right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \left(1 + \frac{3}{n^3} - \frac{1}{n^4} - 1 \right)}{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}} + 1 \right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}} + 1 \right)} =$$

$$\stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{\infty + 0 - 0}{(1-1)(1+1)} = \frac{\infty \cdot \frac{1}{0}}{0} = \infty \cdot \infty = \infty$$

4)h) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{n}$

plyne = $\sqrt[3]{6}$ z teorie ke cwiklu,

protože $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$